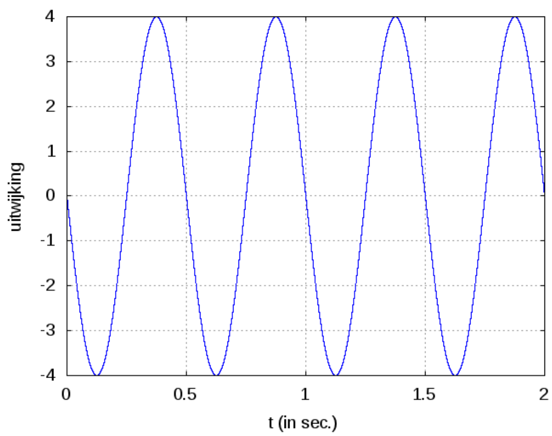
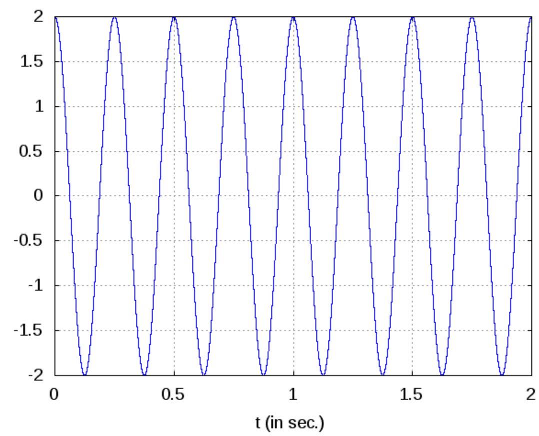
Tentamen Signalen & Systemen

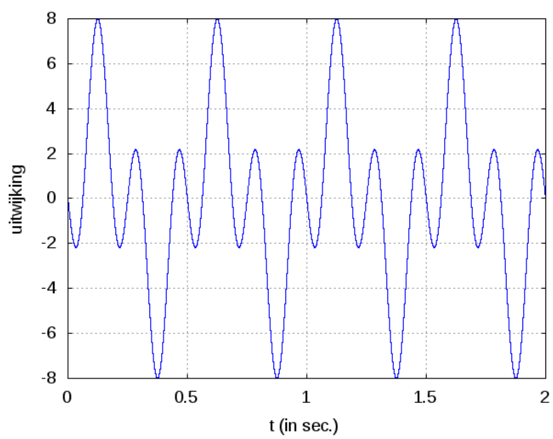
Donderdag 8 april 2010, 9:00-12:00 uur, Examenhal

- Lees eerst een opgave volledig door alvorens deze te maken. Schrijf netjes en zorgvuldig.
- Bij dit tentamen is een formuleblad beschikbaar. Als je gebruik maakt van een formule van dit blad, vermeld dan het nummer van de formule. Andere literatuur, zoals het boek, mag niet geraadpleegd worden.
- Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan.
- Voor antwoorden zonder toelichting worden geen punten toegekend (zelfs als het antwoord juist is).
- Het tentamen bestaat uit 4 opgaven. Opgaven 1, 2 en 4 zijn 2 punten waard. Opgave 3 is 3 punten waard. Je krijgt 1 punt gratis.

Opgave 1: signalen en spectra
In de onderstaande figuren zijn 3 continue signalen (uitwijking als functie van de tijd) weergegeven.







(a) Geef voor ieder signaal een formule voor de uitwijking als functie van de tijd.

(b) Gegeven zijn de continue signalen $x(t)$, $y(t)$ en $z(t)$:

$$\begin{aligned} x(t) &= 2\sin(2\pi 7t) \\ y(t) &= \cos(2\pi 3t + \pi/4) \\ z(t) &= x(t)y(t) \end{aligned}$$

Schrijf ieder van deze signalen als een **som** van complexe e-machten.

(c) Teken van ieder signaal het spectrum. Geef waarden langs de assen en geef voor de frequentiecomponenten aan wat de fase is.

(d) Construeer de formule (uitwijking als functie van de tijd) van een continu signaal $f(t)$ dat lineair toeneemt in frequentie. De instantane frequentie op $t = 0$ is 220Hz. en op $t = 3$ is deze 2320 Hz. Op $t = 0$ is de fase $\phi = 0$ en de amplitude $A = 1$.

(e) Hoe heet het type signaal uit onderdeel (d)? Teken het spectrogram van $f(t)$ voor $0 \leq t < 3$. *[Opmerking: Als je onderdeel (d) niet hebt gemaakt, dan kun je toch deze plot maken]*

Opgave 2: Fourier analyse

Gegeven is een periodiek continu signaal $x(t) = x(t + 2)$ voor alle t. Tevens is gegeven

$$x(t) = \begin{cases} e^t & \text{voor } 0 \leq t < 1 \\ e^{2-t} & \text{voor } 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

(a) Bepaal de DC-component a_0 van het signaal $x(t)$.

(b) Laat zien dat de Fourier-coëfficienten a_k (voor $k \neq 0$) van het signaal $x(t)$ gegeven worden door

$$a_k = \begin{cases} (e-1)/(\pi^2 k^2 + 1) & \text{voor even } k, \\ (-e-1)/(\pi^2 k^2 + 1) & \text{voor oneven } k. \end{cases}$$

(c) Gegeven is het signaal $z(t) = 3 + 5\sin(2\pi 5t) + 7\cos(2\pi 30t)$. Bepaal de Fourier-coëfficienten (voor alle k) van het signaal $z(t)$.

Opgave 3: LTI-systemen

Gegeven zijn drie systemen $p[n]$, $q[n]$ en $r[n]$:

$$\begin{aligned} p[n] &= x[n] + x[n+1] + x[n+2] \\ q[n] &= x[n] + x[n-1] + x[n-2] \\ r[n] &= |x[n]| + |x[n-1]| + |x[n-2]| \end{aligned}$$

(a) Geef van ieder systeem aan of het (1) lineair, (2) tijdsinvariant en (3) causaal is.

Een FIR-system F_0 wordt gegeven door de unit impulse respons:

$$h_0[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 2\delta[n-3] + \delta[n-4].$$

Het discrete signaal $x[n]$ wordt gegeven door:

$$x[n] = 3\delta[n] + \delta[n-1] + 4\delta[n-2] + \delta[n-3] + 5\delta[n-4].$$

(b) Wat is de uitvoer van het systeem F_0 als we op de invoer het signaal $x[n]$ plaatsen?

We plaatsen $x[n]$ op de invoer van een onbekend LTI-system F_1. De uitvoer is het discrete signaal $y[n] = 3\delta[n] - 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2] - 3\delta[n-3] + 4\delta[n-4] - 5\delta[n-5]$.

(c) Bepaal de unit impulse respons van het systeem F_1.

De *unit-step* functie $u[n]$ wordt gegeven door:

$$u[n] = \begin{cases} 0 & \text{voor } n < 0 \\ 1 & \text{voor } n \geq 0 \end{cases}$$

Als we $u[n]$ op de invoer van een onbekend LTI-system F_2 plaatsen, vinden we de uitvoer $y[n]$. Als we $w[n] = 2u[n-1]$ op de invoer van hetzelfde systeem plaatsen, vinden we de uitvoer $z[n]$. De uitvoeren worden gegeven door:

$$y[n] = \begin{cases} 0 & \text{voor } n < 0 \\ 2 & \text{voor } n = 0 \\ 9 & \text{voor } n = 1 \\ 10 & \text{voor } n = 2 \\ 18 & \text{voor } n \geq 3 \end{cases} \qquad z[n] = \begin{cases} 0 & \text{voor } n \leq 0 \\ 4 & \text{voor } n = 1 \\ 18 & \text{voor } n = 2 \\ 20 & \text{voor } n = 3 \\ 36 & \text{voor } n \geq 4 \end{cases}$$

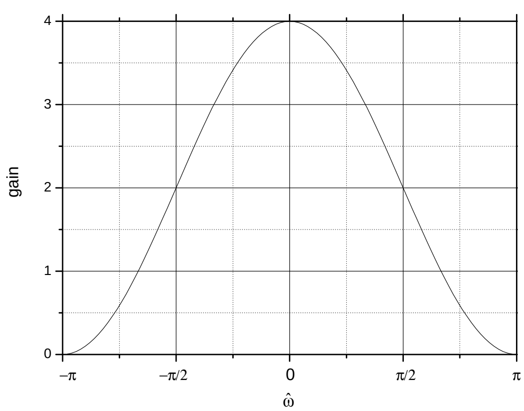
(d) Gebruik de lineariteit en tijdsinvariantie van F_2 om zijn impulsresponse te vinden.

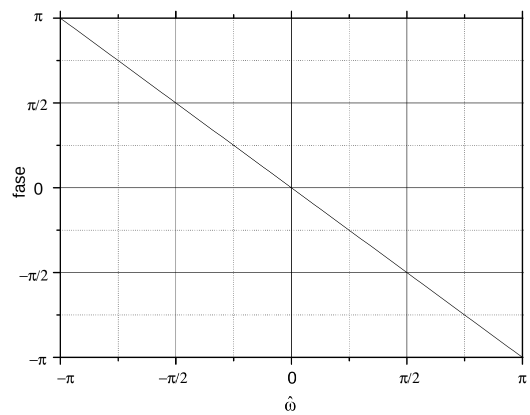
(e) Een systeem wordt gebouwd door drie LTI-systemen in serie ('*cascade*') te plaatsen, m.a.w. de uitvoer van S_0 is de invoer van S_1 en de uitvoer van S_1 is de invoer van S_2, waarbij:

$$\begin{aligned} S_0 : y_0[n] &= x_0[n] - x_0[n-1] \\ S_1 : y_1[n] &= x_1[n] + x_1[n-2] \\ S_2 : y_2[n] &= x_2[n-1] - x_2[n-2] \end{aligned}$$

Wat is de differentievergelijking en de frequentierespons $H(e^{j\hat{\omega}})$ van het samengestelde systeem?

(f) De onderstaande plots tonen de *gain* (links) en de fase-verschuiving (rechts) van een FIR-filter voor de frequenties $-\pi < \hat{\omega} \leq \pi$.





Wat is de uitvoer van dit systeem voor ieder van de volgende invoeren:

- $x_0[n] = 1$
- $x_1[n] = 2\cos(n\pi/2)$
- $x_2[n] = 3\cos(n\pi + \pi/4)$
- $x_3[n] = 1 + 2\cos(n\pi/2) + 3\cos(n\pi + \pi/4)$

Opgave 4: z-transformaties
Een LTI-systeem wordt gegeven door de differentie-vergelijking

$$y[n] = \frac{1}{4}(x[n] + x[n-1] + x[n-2] + x[n-3]).$$

(a) Bepaal de nulpunten van de systeemfunctie. Wat is het belang van deze nulpunten?

(b) We bieden dit systeem de invoer $x[n] = 4 + \cos(\frac{n\pi - \pi}{2}) - 3\cos(\frac{n\pi}{3})$ aan. Wat is de uitvoer?

(c) Een eenvoudige manier om een FIR-filter te construeren dat het signaal $x_k[n] = \cos(2\pi n/k)$ verwijderd is een k-point averager. Construeer, met behulp van deze methode, een FIR-filter dat het signaal $x[n] = \cos(n\pi) + \cos(\frac{n\pi}{3})$ volledig verwijderd. Wat is de differentievergelijking en de systeemfunctie van dit filter?

(d) Het nadeel van de constructie uit onderdeel (d) is dat op deze manier geconstrueerde filters niet erg specifiek zijn. Ze verwijderen niet alleen de gewenste frequenties, maar ook andere. Laat zien dat dit inderdaad het geval is.

(e) Construeer de systeemfunctie van een FIR filter dat specifiek is voor $x[n] = \cos(\frac{n\pi}{4}) + \cos(\frac{n\pi}{3})$, m.a.w als $z[n] = x[n] + y[n]$ dan zijn de uitvoeren van het systeem hetzelfde bij de invoeren $z[n]$ en $y[n]$ (voor willekeurige $y[n]$).

Formuleblad Systemen en Signalen

$$\begin{aligned}
\cos(\theta) &= \sin(\theta + \pi/2) && (1)\\
\cos(\theta) &= \cos(\theta + 2\pi k) \text{ voor gehele } k && (2)\\
\cos(\theta) &= \cos(-\theta) && (3)\\
\sin(-\theta) &= -\sin(\theta) && (4)\\
\cos(2\pi k) &= 1 \text{ voor gehele } k && (5)\\
\cos(\pi k + \frac{\pi}{2}) &= 0 \text{ voor gehele } k && (6)\\
\cos(2\pi k + \pi) &= -1 \text{ voor gehele } k && (7)\\
j^2 &= -1 && (8)\\
Re(a + jb) &= a && (9)\\
Im(a + jb) &= b && (10)\\
(a + jb)^* &= a - jb && (11)\\
e^{j\theta} &= \cos(\theta) + j\sin(\theta) && (12)\\
\cos(\theta) &= \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} && (13)\\
\sin(\theta) &= \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} && (14)\\
\int e^{\alpha t} dt &= \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} + c && (15)\\
\int t e^{\alpha t} dt &= \frac{\alpha t - 1}{\alpha^2} e^{\alpha t} + c && (16)\\
x[n] &= x(nT_s) \text{ Perfect A-to-D conversion} && (17)\\
f_s &= \frac{1}{T_s} \text{ Sampling frequency} && (18)\\
\hat{\omega} &= \omega T_s = \frac{\omega}{f_s} \text{ Normalized Radian Frequency} && (19)\\
y(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] p(t - nT_s) \text{ Interpolation/Reconstruction} && (20)\\
p(t) &= \frac{\sin(\pi t/T_s)}{\pi t/T_s}, \quad -\infty < t < \infty \text{ Sinc pulse} && (21)\\
x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j(2\pi/T_0)kt} \text{ Fourier synthesis} && (22)\\
a_k &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j(2\pi/T_0)kt}\, dt \text{ Fourier analysis} && (23)\\
X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(2\pi/N)kn} \text{ DFT (Discrete Fourier Transform)} && (24)
\end{aligned}$$

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j(2\pi/N)kn} \text{ Inverse DFT} \tag{25}$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \text{ FIR system} \tag{26}$$

$$h[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k \delta[n-k] \text{ Unit impulse response} \tag{27}$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} h[k]x[n-k] \text{ Convolution sum FIR-system} \tag{28}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \text{ General convolution} \tag{29}$$

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\hat{\omega}k} = \sum_{k=0}^{M} h[k]e^{-j\hat{\omega}k} \text{ Frequency response FIR-system} \tag{30}$$

$$h_1[n] * h_2[n] \leftrightarrow H_1(e^{j\hat{\omega}})H_2(e^{j\hat{\omega}}) \tag{31}$$

$$D_L(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{\sin(\hat{\omega}L/2)}{L\sin(\hat{\omega}/2)} \text{ Dirichlet function} \tag{32}$$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{N} x[k]z^{-k} \text{ Z-transform} \tag{33}$$

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k} = \sum_{k=0}^{N} h[k]z^{-k} \text{ System function FIR system} \tag{34}$$

$$ax_1[n] + bx_2[n] \leftrightarrow aX_1(z) + bX_2(z) \text{ Linearity of z-transform} \tag{35}$$

$$y[n] = h[n] * x[n] \leftrightarrow Y(z) = H(z)X(z) \text{ Convolution via z-domain} \tag{36}$$

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \tag{37}$$